Elementare Logik 2.0

Vo. 28.02.2011

Gliederung von <u>sprachlichen Ausdrücken</u> in:

1) deskriptive Ausdrücke:

a) <u>singuläre Terme</u>:

zu den singulären Termen gehören:

-Eigennamen: Wolfgang Amadeus Mozart, Reinhard Kamitz etc.

-individuelle Kennzeichnungen: genaues Merkmal, welches nur einem einzigen Gegenstand zukommt, z.b. der jetzig amtierende Bundespräsident (es kann nur einen geben)

-singuläre Personalpronomen: ich, du, er, sie, es

-Ausdrücke, die mit einem Possessivum beginnen: deine Mutter, meine Schwester, sein Sohn etc.

-Zahlenausdrücke: 3, 8, 9, 3+5 etc.

-hinweisende Fürwörter und mit ihnen gebildete sprachliche Ausdrücke: z.b: dieser Mann dort

b) <u>generelle Terme:</u> Das sind Eigenschaften wie zum Beispiel, Mensch, Philosoph, rot, blau etc.

c) <u>Relationsausdrücke:</u> Ausdrücke, die eine Relation zwischen 2 Gegenständen beschreiben, z.B. Y ist der Vater von X, X hat mehr Einwohner als das Land Y etc.

d) <u>ganze Aussagesätze:</u> Beispiel: Der Gärtner war der Mörder.

2) logische sprachliche Ausdrücke:

(=Formwörter) → die einzigen Wörter, die in der Argumentform vorkommen dürfen: und, oder, wenn dann, es ist nicht der Fall dass etc.

Wir erinnern uns (Elementare Logik I), dass die Gültigkeit von Sequenzen rückübertragen wird auf das Argument! Folgendes Beispiel:

Bsp.1) 1. <u>Einige</u> Landeshauptstädte <u>sind</u> Großstädte.

2. <u>Alle</u> Landeshauptstädte <u>sind</u> Universitätsstädte.

Ergo gilt: <u>Einige</u> Universitätsstädte <u>sind</u> Großstädte.

→ Formalisieren: Man könnte nun einfach nehmen:

A

B

Ergo: C

Damit ist die Sequenz ungültig obwohl das Argument eigentlich schlüssig ist. Die oben bereits unterstrichenen Wörter sind dafür verantwortlich. Sie sind aber auch neu für uns.

→ „Einige….sind….“ an diese Leerstellen (….) können wir keine Platzhalter wie A, B, C stellen, die für ganze Aussagesätze stehen. Wir benötigen generelle Terme. Hatten wir auch schon im letzten Semester.

z.B: Einige A sind B.

Alle A sind C.

Ergo gilt: Einige C sind B.

A=Europäer, B=Italiener, C=Menschen

Das Argument mit generellen Termen ist gültig, aber nun können wir nicht mehr von einem aussagenlogischen Argument sprechen.

Oder ein anderes Bsp:

1) Alle Menschen sind sterblich.
2) Sokrates ist ein Mensch.
Ergo gilt: Sokrates ist Sterblich.

→ Aussagenlogische Realisierungen sind hier nicht mehr adäquat.

Oder

1. Kein Kommunist ist ein Kapitalist oder ein Katholik.

2. Wenn es nicht der Fall ist, dass Jakob ein Kapitalist ist, dann ist er ein Katholik.

Ergo gilt: Es ist nicht der Fall, dass Jakob ein Kapitalist ist.

Auch bei diesem Beispiel ist keine gültige <u>aussagenlogische</u> Sequenz möglich. Alle Beispiele sind gültig, aber nicht <u>aussagenlogisch</u> beweisbar!

Durch die neunen Formwörter wie „Einige…sind“ und „keine“ etc. erweitert sich unser Bereich des Logischen!

Wir bewegen uns in einem **quantorenlogischen** System, genannt „**Q**“.

1) Zeichen von Q:

Junktoren von Q: ¬, Λ, ↔, -->, V (kennen wir schon aus der Elementaren Logik I)

Klammern:), (

Satzbuchstaben von Q: A-Z aber auch A_1-Z_1 und A_2-Z_2 etc.

Quantoren von Q:

Es gibt genau 2 Quantoren: ∀= Allquantor, oder auch Generalisator

∃= Existenzquantor, Partikulisator

Individuenkonstanten: a-t aber auch a_1-t_1 etc., z.B. Der Kleinbuchstabe steht für einen bestimmten Menschen, a=Sokrates.

Prädikate von Q:

Entsprechen den generellen Termen: A-Z aber mit oberen Index → A^4, B^8 etc. aber auch A_1^4 etc.

Der untere Index ist entscheidungstragend, der obere Index dagegen ist der Stellungsindex.

Die Konstanten von Q gliedern sich also in 2 Lager: 1) logische Konstanten (=Junktoren, Quantoren)

2)außerlogische Konstanten (=Satzbuchstaben, Prädikate, Individuenkonstanten)

Die Klammern sind keine Konstanten, sie sind eine eigene Gruppe!

Variablen von Q: v-z aber auch v_1-z_1 etc.

Diese Variablen treten immer direkt rechts neben dem Quantor auf, können aber auch eine andere Stelle einnehmen, der Quantor nicht!

→ Formeln und Sätze sind jetzt nicht mehr synonym, es gibt jetzt auch Formeln, die keine Sätze sind.

Begriffe:

1) Zeichenreihe von Q: Ist entweder ein einzelnes Zeichen oder eine Folge von unendlich vielen Zeichen von Q.

Z.B.: a¬Λ↔ wäre eine Zeichenreihe.

2) Terme von Q: Ist entweder eine Variable oder eine Individuenkonstante.

3) Quantifikator (Vorsicht, ist nicht das Gleiche wie ein Quantor):

Ist eine Zeichenreihe mit genau zwei Zeichen, wobei das Erste ein Quantor und das Zweite unmittelbar rechts daneben stehende Zeichen eine Variable ist.

z.B.: 1) $\forall z$
2) $\exists v_{12}$

Ende der Vo.

Vo. 07.02.2011

1) <u>Formeln von Q:</u>

a) Atomare Formeln von Q

b) Formelnbildungsregeln

2) <u>Freies und gebundenes Vorkommen von Variablen</u>

3) <u>Sätze von Q</u>

Ad a.) Atomare Formeln sind (1) Satzbuchstaben (ohne Klammern), und (2) Jede Zeichenreihe, die aus genau einem n-stelligen Prädikat gefolgt von genau n-Termen und sonst nichts ist. ((2) nennt man auch Prädikation)

z.B.: T, K, V_{21}, P^4abcd (hier ist wichtig, dass genau 4 Variablen folgen wenn die 4 hochgestellt ist!!). Es gibt auch Formeln, bei denen die Variablen doppelt sind.

z.B.: G^4aabc

Mal ein kleiner Vorgeschmack auf die Formalisierung mit dem neuen System:

b: Bregenz

g: Graz

S^1: … ist eine Stadt.

E^2: … hat mehr Einwohner als …

Bsp: Bregenz ist eine Stadt. → S^1b

Graz ist eine Stadt. → S^1g

Graz hat mehr Einwohner als Bregenz. → E^2gb

So werden unsere Argumente in Zukunft aussehen.

Anmerkung: Prädikate von Q, die zweistellig (oder höher stellig) sind, drücken immer Relationen aus.

→ Im quantorenlogischen System können wir viel mehr ausdrücken als im Aussagenlogischen. Damals haben wir mit einem Satzbuchstaben ganze Sätze ersetzt. Nun können wir Relationen genau ausdrücken, syntaktische Unterschiede sofort durch die Stellung z.B. gb oder bg erkennen.

Ad. Formelbildungsregeln:

1) Jede atomare Formel ist eine Formel.

2) Für alle Zeichen ϕ und ψ gilt: Wenn ϕ und ψ Formeln sind, dann auch ihre Negationen, Subjunktionen, Kunjunktionen, Bisubjunktionen, Disjunktionen.

z.B.: $\neg E^2Bg$ Ist aber keine atomare Formel mehr.

Alles ab 2 ist eine molekulare Formel.

3) Die Kleinbuchstaben „α und β“ stehen nun für beliebige Individuenkonstanten. Sie sind also metasprachliche Zeichen.

→ Für alle Zeichenreihen ϕ gilt: Wenn ϕ eine Formel ist, so sind auch$\forall x\varphi$ und $\exists x\varphi$ Formeln.

4) Sonst ist nichts eine Formel.

Anhand von ein paar Beispielen üben wir uns darin, Formeln zu erkennen.

Bsp.1) $\forall x(T \dashrightarrow \exists y \neg B^2xy)$

Folgendes Prinzip: Wir schauen, ob die einzelnen Teile dieser Formel unter der Beachtung der 4 Regeln ebenfalls Formeln sind.

T = Satzbuchstabe, also eine Atomare Formel.

B^2xy ist ein Prädikator mit 2 Stellen dahinter, also auch eine Formel. Die Negation ist demnach auch eine Formel.

Regel 3: Der Quantifikator (in diesem Fall der Existenzquantifikator∃) darf dort stehen. Also ist auch das eine Formel. Die 2 Klammern schließen die Subjunktion ein und stehen demnach korrekt. Der Allquantifikator ∀ darf nun auch am Anfang so stehen.

→ Dieses Gebilde ist eine Formel, und zwar eine Allquantifikation!

Bsp. 2) $\neg\exists z \neg\forall y(\forall z B^1x \dashrightarrow P^1y)$

→ Ist eine Formel, und zwar eine Negation!

Bsp. 3) $\exists x(\exists y(\exists z(\forall u\forall w(P^1w \dashrightarrow P^1x) \wedge Q^2ux) \wedge \neg N^1z))$

→ Ist keine Formel!!!! Wir haben ein Klammerpaar zu viel! Die Klammer nach dem Existenzquantifikator x! Immer genau schauen, denn wenn etwas keine Formel ist, dann müssen wir auch nicht weiter machen.

Bsp. 4) $\exists\alpha Y^2xa$

Auf den ersten Blick sehen wir, dass das keine Formel ist. Wegen dem Alpha, es ist nämlich ein metasprachliches Zeichen, und kein Zeichen unserer formalen Sprache!!!!

→ aus der Menge an Formeln sollen wir nun Sätze herausfiltern. Es gilt, dass Sätze bei einer bestimmten Bewertung wahr oder falsch sind.

z.B.: S^1b bedeutet „Bregenz ist eine Stadt."

S^1x bedeutet „x ist eine Stadt".

Zweiterer Satz kann nicht bewertet werden, da „x" keine Individuenkonstanteist. Bei der Verbalisation fällt also schon auf, dass es diesen Satz in der deutschen Sprache nicht wirklich geben kann.

Bsp.) $\exists x(S^1x \land E^2xb)$ Bedeutet: Es gibt mindestens ein x für das gilt, x ist eine Stadt und x hat mehr Einwohner als Bregenz. Bei der Verbalisation müsste man für x „irgendeine Stadt" nehmen, damit es einen Sinn ergibt!

Vo. 14.03.2011

Es folgen Definitionen für das Verständnis des Begriffs des Satzes:

Für alle Formeln ϕ möge gelten:

1) „Der Bereich eines Quantifikators in ϕ ist der Quantifikator selbst, zusammen mit der in ϕ unmittelbar auf ihn folgenden, kürzersten Formel".

Beispiele für diese Regel:

a) $\forall x \neg (H^3xcc \leftrightarrow \exists z \neg \exists v(T^2yz \wedge \neg K^4avzx))$

→ Zum Allquantor $\forall x$ kommt nun alles auf ihn folgende hinzu, also

$\neg (H^3xcc \leftrightarrow \exists z \neg \exists v(T^2yz \wedge \neg K^4avzx))$.Hier müssen wir bis ganz nach hinten gehen, um die erste, kürzeste Formel zu finden.

→ Zum Existenzquantor $\exists z$ kommt alles bis einschließlich der ersten Klammer hinzu. Also

$\neg \exists v(T^2yz \wedge \neg K^4avzx)$

→ Für $\exists v$ gilt das gleiche wie für $\exists z$, also alles bis einschließlich der ersten Klammer. Also

$(T^2yz \wedge \neg K^4avzx)$

b) $\neg\exists z \neg\forall y (\forall y P^1x \dashrightarrow P^1y)$

→$\exists z$ + $\neg\forall y (\forall y P^1x \dashrightarrow P^1y)$

→$\forall y$ + $(\forall y P^1x \dashrightarrow P^1y)$

→$\forall y$ (der zweite Allquantor in der Klammer) + $P^1x \dashrightarrow P^1y$

c) $\neg\exists w\ \forall z \neg(L^1z \dashrightarrow (O^2dw \vee \neg\forall y D^5aywwz))$

→ gleich aufzulösen wie oben!

→$\exists w$ + $\forall z \neg(L^1z \dashrightarrow (O^2dw \vee \neg\forall y D^5aywwz))$

→$\forall z$ + $\neg(L^1z \dashrightarrow (O^2dw \vee \neg\forall y D^5aywwz))$

→ $\forall y$ + D^5aywwz

Für alle Variablen α gilt:

2) „Ein Quantifikator ist mit α gleichnamig genau dann wenn α die Variable dieses Quantifikators ist"

Per definitionem wissen wir ja schon, dass jeder Quantifikator genau eine Variable besitzt, und eben mit dieser ist er gleichnamig.

z.B.: $\forall x_9$ ist gleichnamig mit der Variable x_9.

Für alle Formeln ϕ und für alle Variablen α gilt:

3) „α kommt in ϕ an genau jenen Stellen vor, an denen α in ϕ vorkommt und dort im Bereich eines mit α-gleichnamigen Quantifikators liegt."

Analog dazu:

4) „α kommt in ϕ an genau jenen Stellen FREI vor, an denen α in ϕ vorkommt aber nicht gebunden (=mit dem Quantifikator nicht gleichnamig) ist bzw. vorkommt."

Unterschiede zwischen Formeln und Sätzen

Für alle Formeln ϕ gilt:

5) „ϕ ist ein Satz(=geschlossene Formel) genau dann wenn ϕ keine freie Variable enthält."

Analog dazu:

6) „ϕ ist eine offene Formel genau dann wenn ϕ nicht geschlossen ist, und das heißt, genau dann wenn in ϕ an mindestens einer Stelle eine Variable frei vorkommt."

Nun ergibt es sich, dass wir jedes Gebilde unseres Systems einer Gruppe zuordnen können. Entweder Formel oder Satz. Die Beschreibung unserer formalen Sprache ist nun abgeschlossen. Sätze sind aber relevanter für uns, da wir nur mit ihnen Bäume bilden können. Dazu aber später mehr.

Es gibt 2 Wege, aus einer Formel einen Satz zu machen:

1) Ein Satz entsteht, wenn wir für die Variable eine Individuenkonstante einsetzen.

z.B.: Formel: S^1x Satz: S^1a

2) Ein Satz entsteht durch Einfügen eines gleichnamigen Quantifikators.

z.B.: Formel: S^1x Satz: $\exists xS^1x$

Diese 2 Varianten können auch kombiniert werden:

z.B.: Formel: E^2xy Satz: $\exists xE^2xb$

(also haben wir für die Variable x einen gleichnamigen Existenzquantor eingefügt und aus der Variablen y eine Individuenkonstante gemacht.)

z.B.: E^2xy Satz: $\forall x\exists yE^2xy$

(hier haben wir lediglich 2 Quantifikatoren eingesetzt, die jeweils mit einer Variable gleichnamig sind.)

Beispiele für besseres Verständnis:

1) Wenn ϕ ein Satz ist, dann auch ¬ϕ.

2) Wenn ϕ und ψ Sätze sind, dann auch (ϕ-->ψ).

3) ∀αϕ ist ein Satz. Daraus folgt aber nicht gleich, dass ϕ alleine auch ein Satz sein muss. In ϕ kann höchstens α vorkommen.

Anhand von Beispielen werden wir nun üben, Sätze und Formeln zu unterscheiden. Dafür nehmen wir die Beispiele a-c von oben, und danach noch ein paar andere.

a) $\forall x\neg\ (H^3xcc \leftrightarrow \exists z\neg\ \exists v(T^2yz \land \neg\ K^4avzx))$

Variablen: x, z, v und y

Nun müssen wir prüfen, ob diese „frei“ oder „gebunden“ sind. Von links nach rechts.

x kommt im Allquantor vor und ist dadurch gebunden.

z kommt im Existenzquantor vor und ist somit gebunden.

v kommt auch im Existenzquantor vor und ist gebunden.

Das y bei „T^2yz“ ist nicht gebunden, es gibt keinen Quantifikator, der gleichnamig ist, also ist y frei. → Dieses Gebilde ist kein Satz, sondern eine offene Formel.

b) $\neg\exists z\ \neg\forall y\ (\forall y P^1 x \rightarrow P^1 y)$

Variablen: x, y, z

z und y sind an Existenz-bzw.-Allquantor gebunden.

x hingegen nicht, also frei.

→ Auch dieses Gebilde ist kein Satz.

c) $\neg\exists w\ \forall z \neg(L^1 z \rightarrow (O^2 dw \lor \neg\forall y D^5 aywwz))$

Gleiches Prinzip wie oben.

Variablen: w,z,y

Wir sehen also, dass alle Variablen gebunden sind, dieses Gebilde ist demnach ein Satz!

Weitere Beispiele:

d) $\forall x \exists x((\exists x \forall x\ T^1 x \lor \exists x \exists x P) \rightarrow \forall x \forall x H^1 y)$

Das x ist gebunden, aber das y nicht. → offene Formel

e) $\forall v(\forall w B^4 wvab \land \exists y \neg B^4 bvya)$

Alle Variablen, also v,w und y sind gebunden. → Satz

f) $((P \rightarrow S) \leftrightarrow \forall v(P \leftrightarrow \exists x(S \lor P)))$

v und y sind gebunden. → Satz

Vo. 21.03.2011

Neues Thema:

Einsetzungen (=Substitutionen)

Kleine Wiederholung der Zeichen von Q:

Φ,ψ,χ......Variablen für Zeichenreihen von Q

Γ,Δ…..Variablen für Satzmengen von Q

α,β…..Variablen für Variablen von Q

Neu dazu:

γ, δ…..Variablen für Individuenkonstanten von Q

π…..Variablen für Prädikate von Q

Es gibt 4 Regeln im Zusammenhang mit Einsetzungen:

1) Eingesetzt wird ausschließlich in einer Formel, niemals in irgendwelchen anderen Zeichenreihen.

2) Eingesetzt wird in einer Formel ausschließlich für <u>eine einzige Variable</u>, die in der Formel an mehreren Stellen vorkommen kann, niemals simultan für verschiedene Variablen und niemals für irgendwelche anderen Zeichen.

3) Eingesetzt wird in einer Formel für eine Variable ausschließlich eine Individuenkonstante, niemals irgendwelche anderen Zeichen.

4) Eingesetzt wird in einer Formel ϕ für eine Variable α eine Individuenkonstante γ, indem man in ϕ an <u>genau</u> jenen Stellen, d.h. an all jenen und nur an jenen Stellen, an denen α in ϕ <u>frei</u> vorkommt, α durch γ ersetzt.

Erläuterungen zu den Regeln:

1) <u>Einsetzungsformel</u> ist jene Formel ϕ, in der Für die Variable α die Individuenkonstante γ eingesetzt wird.

2) <u>Einsetzungsvariable</u> ist jene Variable α, für die in der Formel ϕ die Individuenkonstante γ eingesetzt wird.

3) <u>Einsetzungskonstante</u> ist jene Individuenkonstante γ, die in der Formel ϕ für α eingesetzt wird.

4) <u>Einsetzungsergebnis</u> ist jene Formel, die aus ϕ durch eine Einsetzung von γ für α hervorgeht.

Man schreibt symbolisch: [ϕ]γ/α Gelesen: Formel ϕ mit γ für α

Bsp.e:

1) $(F^2xa \rightarrow \neg G^1x)$ x ist nun die Einsetzungsvariable

a ist unsere Einsetzungskonstante

Nun schreibt man so an: $[(F^2xa \rightarrow \neg G^1x)]a/x$

→ $(F^2aa \rightarrow \neg G^1a)$ Das ist das Einsetzungsergebnis!!

2) $[(\forall xF^2xa \rightarrow \neg G^1x)]b/x$

→ $(\forall xF^2xa \rightarrow \neg G^1b)$ Das erste x darf nicht ersetzt werden, es steht nicht FREI!!

3) $[\exists z(F^2xz \land \forall y\,(G^4yzxc \rightarrow \forall xH^1x))]a/x$

→ $\exists z(F^2az \land \forall y\,(G^4yzac \rightarrow \forall xH^1x))$ Das letzte x nicht ersetzt, weil es nicht frei steht!!

4) $\forall xF^1x$ Das ist eine Formel, bei der die Variable α an <u>keiner</u> Stelle frei vorkommt. Das Einsetzungsergebnis ist nun <u>identisch</u> mit der Einsetzungsformel. Das führt uns zu den

2 Arten von Einsetzungen

1) <u>gewöhnliche Einsetzungen</u>: In der Einsetzungsformel ϕ kommt die Einsetzungsvariable α an mindestens einer Stelle frei vor.

2) <u>ungewöhnliche (=uneigentliche) Einsetzungen:</u> In der Einsetzungsformel ϕ kommt die Einsetzungsvariable α an <u>keiner</u> Stelle frei vor. (Gilt auch für den Fall, dass überhaupt keine Variable vorhanden ist)

Weiter mit den Beispielen:

5) $[\exists z(F^2xz \land \forall y\forall x\,(G^4yzxc \rightarrow H^1x))]\ a/x$

→ $\exists z(F^2az \land \forall y\forall x\,(G^4yzxc \rightarrow H^1x))$

6) $[\exists z\forall x(F^2xz \land \forall y\,(G^4yzxc \rightarrow H^1x))]\ a/x$

→ $\exists z\forall x(F^2xz \land \forall y\,(G^4yzxc \rightarrow H^1x))$ Das ist ein Beispiel für die <u>ungewöhnliche Einsetzung</u>

7) $[(F^2ca \leftrightarrow \exists x\exists y((G^1x \wedge G^1y)) \wedge H^2xy))]$ a/x

→ $(F^2ca \leftrightarrow \exists x\exists y((G^1x \wedge G^1y)) \wedge H^2xy))$ Bleibt auch gleich, kurz könnte man schreiben $[\phi]a/x = \phi$

8) $[(F^2ca \leftrightarrow \exists y((G^1x \wedge G^1y)) \wedge H^2xy))]$ a/x

→ $(F^2ca \leftrightarrow \exists x\exists y((G^1a \wedge G^1y)) \wedge H^2ay))$

Für die Übungsbeispiele relevant: Ist die Zeichenreihe das Ersetzungsergebnis von einer Formel??
Beispiele dazu:

1) F^1a/F^1b Nein

2) F^2xy/F^2yx Nein, hier sind ja nur die Variablen vertauscht!

3) $\neg H^1a/ \neg H^1a$ Ja, das ist das Ergebnis einer ungewöhnlichen Ersetzung!

4) $\exists xF^3bxy/ \exists xF^3bxb$ Ja, b für y (=b/y)

5) G^1c/G^1z Nein

6) $(\forall xF^2dx \text{ --> } G^2xx)/ (\forall xF^2dc \text{ --> } G^2cc)$ Nein, das x bei F^2dx war hier nicht frei!!!!

7) $(\forall xF^2dx \text{ --> } G^2xx)/ (\forall xF^2dx \text{ --> } G^2xx)$ Ja, ungewöhnliche Ersetzung z.B: a/y, y kommt nicht vor, also Ungewöhnlich!!

8) $(\forall xF^2dx \text{ --> } G^2xx)$ $(\forall xF^2dx \text{ --> } G^2bb)$ Ja, b/x

9) T^3xyx/T^3aba Nein, hier wurden 2 Schritte gemacht (1) a/x und (2) b/y, und das ist regelwidrig!!

10)$\exists y(G^2ax \wedge H^1x)/ \exists y(G^2ad \wedge H^1d)$ Ja, d/x

Ende der Vo!!

Vo. 28.03.2011

Bewertungssemantik für das System Q

1) Bewertung von Q

2) Wahrheit und Falschheit von Q-Sätzen bei der Bewertung von Q

3) Der Begriff der (quantoren)logischen Folgerung bzw. der Begriff der gültigen Sequenz

Def: „B ist eine Bewertung von Q g.d.w. B jedem Satz von Q genau einen der beiden Werte 1 und 0 zuordnet und dabei den folgenden 7 Bedingungen genügt.“

1) Eine Negation $\neg\phi$ ist wahr bei B g.d.w. ϕ bei B falsch ist.

2) Eine Konjunktion $(\phi \wedge \psi)$ ist wahr bei B g.d.w. ϕ wahr ist bei B und ψ wahr ist bei B.

3) Eine Disjunktion $(\phi \vee \psi)$ ist wahr bei B g.d.w. ϕ und/oder ψ wahr ist bei B.

4) Eine Subjunktion $(\phi \dashrightarrow \psi)$ ist wahr bei B g.d.w. ϕ falsch ist bei B und /oder ψ wahr ist bei B.

5) Eine Bisubjunktion $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ist wahr bei B. g.d.w. ϕ und ψ den gleichen Wahrheitswert bei B. haben.

6) „Für alle Variablen α und für alle Formeln X („Chi“; griechischer Buchstabe, verwenden wir ab jetzt für generelle Formeln), in denen α frei vorkommt, gilt, $\forall\alpha X$ ist wahr bei B g.d.w. für alle Individuenkonstanten γ gilt, dass X mit γ für α wahr ist bei B.“

[X ist das Glied der Allquantifikation, und nur dort setzen wir ein]

z.B.: $\forall x V^1 x$ $V^1 x$ = Formel

x = Variable

→ Jede B muss wahr sein: z.B. könnte x „vergänglich“ bedeuten, dann bedeutet die Allquantifikation, „Alles ist vergänglich“! Wenn ich nun statt x eine Individuenkonstante einsetze, nehmen wir „Der Autor dieses Skripts“ → „Der Autor dieses Skripts ist vergänglich“ [Weil ja alles vergänglich ist]

7) „$\exists\alpha X$ ist wahr bei B g.d.w. für mindestens eine Individuenkonstante γ gilt, dass [X] γ/α wahr ist bei B.“

z.B.: $\exists x V^1 x$ unter den unendlich vielen Möglichkeiten muss nur eine einzige dabei sein, die bei der Bewertung WAHR ist.

z.B. $\forall x V^1 x$ B= alle atomaren Sätze bekommen den Wert 1

$V^1 x$ ist demnach wahr, also muss auch die Allquantifikation wahr sein. Das gleiche gilt für $\exists x V^1 x$.

Nun ein paar Beispiele zur Überprüfung von Wahrheit und Falschheit.

Bsp. 1) $\forall y\ (B^2cy \dashrightarrow \neg H^2yy)$ B= alle atomaren Sätze 1

$[(B^2cy \dashrightarrow \neg H^2yy)]\ y/y$ damit die Allquantifikation wahr ist, muss ihr Glied wahr sein! Prüfen!

$(B^2cy \dashrightarrow \neg H^2yy)$
1 0 0 1 → Jedes Einsetzungsergebnis ist falsch! Das heißt, dass acuh die Allquantifikation falsch ist bei dieser Bewertung.

Nun das gleiche mit B= alle atomaren Sätze 0!
$(B^2cy \dashrightarrow \neg H^2yy)$
0 1 1 0 Wahr, also ist auch die Allquantifikation bei dieser B wahr!

Bsp. 2) $\forall xP$ Das Glied ist „P“, keine Variable kommt frei vor! Das Ergebnis für die Einsetzung z.B. [P] a/x wäre „P“. In diesem Fall sagt man, dass der Quantifikator leer läuft. Der Satz wäre also nur wahr, wenn P wahr ist.

Bsp. 3) $(\neg \forall wS^3cwc \dashrightarrow A)$ Das ist eine normale Subjunktion, wie wir sie auch schon im ersten Semester kennengelernt haben!

B= alle atomaren Sätze 1
→ $(\neg \forall wS^3cwc \dashrightarrow A)$
0 1 1 1 → WAHR!

Bsp. 4) $(\neg \forall wS^3cwc \dashrightarrow A)$ B= alle atomaren Sätze 0

→ $(\neg \forall wS^3cwc \dashrightarrow A)$
1 0 0 0 → FALSCH!

Bsp. 5) $\exists y \forall x S^3xty$ B= alle atomare Sätze 1

→ von hinten nach vorne: S^3xty ist wahr!
→ Also muss auch $\forall x S^3xty$ wahr sein!
→ Demnach ist auch $\exists y \forall x S^3xty$ wahr!! → WAHR!
[Regel Nummer 7]

Beispiel, bei dem wir nach einer Bewertung suchen sollen, bei der der folgende Satz falsch ist.

Bsp. 1) $(\exists u(A^1u \vee B^1u) \dashrightarrow (\exists u \neg A^1u \dashrightarrow \exists uB^1u))$ [Der Richtigkeit halber müssten wir u noch durch z.B. a ersetzen]
$[(\exists u(A^1u \vee B^1u) \dashrightarrow (\exists u \neg A^1u \dashrightarrow \exists uB^1u))]\ a/u$

Unschwer lässt sich erkennen, dass wir es wieder mit einer Subjunktion zu tun haben. Wir wissen, dass Subjunktionen nur falsch sind, wenn das Vorderglied wahr und das Nachglied falsch ist. Also müssen wir eine Bewertung finden, bei der genau das eintritt.

$(\exists a(A^1a \vee B^1a) \dashrightarrow (\exists a \neg A^1a \dashrightarrow \exists aB^1a))$

Am einfachsten ist es, wenn man eine Bewertung fixiert, und alle anderen den Gegenwert einnehmen.

z.B. A^1a: 1
B^1a: 0

Und dann muss man ausprobieren. →

$(\exists a(A^1a \vee B^1a) \dashrightarrow (\exists a \neg A^1a \dashrightarrow \exists aB^1a))$

1 1 1 0 **0** 0 0 1 0 0 0 →FALSCH (diese Bewertung haben wir gesucht)

Vo. 16.04.2011

Ad. Bewertungssemantik von Q:

1) Bewertung von Q
2) Gültige bzw. ungültige Q-Sequenzen und logische Folgerungen
3) Logisch wahre, falsche und logisch indeterminierte Q-Sätze
4) Äquivalenzen in Q
5) Kontradiktorische Gegensätze in Q
6) Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit in Q

ad. 2)

Eine Sequenz besteht immer aus einer Satzmenge und einem einzelnen Satz (=ϕ). Die Satzmenge sind die Prämissen, der einzelne Satz stellt unsere Konklusion dar. Die Definition über die Gültigkeit von Sequenzen bleibt gleich wie im letzten Semester. Zur Erinnerung:

Def.: „Eine Sequenz σ ist erfüllbar g.d.w. es keine Bewertung gibt, bei der alle Prämissen von σ wahr sind, aber die Konklusion von σ falsch ist."

oder

„Eine Sequenz σ ist gültig g.d.w. bei jeder Bewertung, bei der alle Prämissen von σ wahr sind, auch die Konklusion wahr ist."

oder

„Eine Sequenz σ ist gültig g.d.w. es keine Bewertung gibt, die ein Modell der Prämissenmenge von σ aber kein Modell der Konklusion ist.!

oder

„Eine Sequenz ist gültig g.d.w. jedes Modell der Prämissenmenge von σ auch ein Modell der Konklusion ist."

oder

„ Ein Satz ϕ folgt logisch aus einer Satzmenge Γ [symbolisch ausgedrückt: $\Gamma \models \phi$] g.d.w. jedes Modell von Γ auch ein Modell von ϕ ist."

Oder: „ Eine Sequenz ‹ {Γ, ϕ} › ist gültig g.d.w. $\Gamma \models \phi$."

Die Gültigkeit/Ungültigkeit von Sequenzen wird später durch einen Baum geprüft, in der Zwischenzeit aber noch durch angeben eines Gegenbeispiels!

Bsp. 1) $<\{\exists u L^1 u, \exists u \neg L^1 u\}, T>$ Zeigen, mit Angabe eines Gegenbeispiels, dass diese Sequenz *ungültig* ist.

Ungültig laut Definition dann, wenn die Konklusion, also T, falsch ist, und die Prämissen wahr.

Also können wir schon sicher sagen, dass T den Wert 0 bekommt. T= 0

1. Prämisse: z.B. $L^1a=1$ $L^1a= 1$
Damit wäre die erste Prämisse wahr.

2. Prämisse: Wenn L^1a wahr ist, so ist ihre Negation falsch. Also müssen wir sagen, dass L^1b, L^1c und so weiter den Wert 0 bekommen. Durch den Negator bekommt die Prämisse Wahrheit zugesprochen.

Das Gegenbeispiel lautet also: T= 0
$L^1a= 1$
L^1b etc. = 0

Kürzer angeschrieben könnten wir sagen: $L^1a = 1$, alle anderen atomaren Sätze = 0

Bsp. 2) $<\{\exists w(Q^1w \wedge P^1w), \exists x(P^1x \wedge D^1x)\}, \exists y(Q^1y \wedge D^1y>$ Wieder prüfen, ob ungültig!!

1. Prämisse: Bei einer Konjunktion muss jedes Glied wahr sein, damit sie den Wert 1 bekommt. Natürlich ist nur das Glied der Existenzquantifikation eine Konjunktion, aber laut den Regeln, muss jedes Einsetzungsergebnis wahr sein, damit auch die Quantifikation wahr ist. →

z.B.: $Q^1a=1$
$P^1a=1$ Damit wäre die erste Prämisse wahr!

2. Prämisse: Glied ist wieder eine Konjunktion →

$P^1b=1$
$D^1b=1$ Damit ist auch diese Prämisse wahr!

Konklusion: Muss jetzt falsch sein, daher

$\left.\begin{array}{l} Q^1b=0 \\ D^1c=0 \end{array}\right\}$ könnte man auch als, „alle anderen atomaren Sätze= 0“ anschreiben.

WICHTIG: Nicht die gleichen Konstanten nehmen, sonst würde das nicht stimmen!!
Die Unterscheidung ist also wichtig, deswegen auch D^1b, D^1c, D^1d etc.!!!!!!

Bsp. 3) $<\{\forall x(N^1x \dashrightarrow M^1x), (N^{1i}a \wedge \exists zC^1z)\}, \exists x(M^1x \wedge C^1x)>$ Wieder Ungültigkeit prüfen!!

Am sichersten ist das N^1a in der zweiten Prämisse: Es muss wahr sein! $N^1a=1$

Demnach muss auch M^1x den Wert 1 bekommen. Die Subjunktion in der ersten Prämisse darf nicht falsch sein (1 --> 0, wäre ja falsch, also muss das zweite Glied auch einen 1er bekommen) $\rightarrow$

$M^1a=1$

Dadurch ist gesichert, dass die erste Prämisse immer wahr ist.

Allen anderen N^1-beginnenden geben wir den Wert 0.

$\rightarrow$ $N^1a=1$
$M^1a=1$
$C^1b=1$
Allen anderen atomaren Sätzen= 0

M^1a und C^1b machen den Unterschied aus, also wieder auf die Konstanten achten. Zum Beispiel beim Glied der Konklusion $\rightarrow$ $(M^1a \wedge C^1a)$ So muss es sein! ☺

1 **0** 0

Das nächste Beispiel befasst sich mit der Gültigkeit einer Sequenz. Dazu müssen wir den indirekten Beweis anwenden, das heißt, wir nehmen an, dass es ein Gegenbeispiel gibt, und führen so einen Widerspruch an, der beweist, dass die Sequenz gültig ist.

Bsp. 4) $<\{\forall x(T^1x \vee S^1x), \neg T^1a\}, \exists x S^1x>$ Indirekt beweisen, dass diese Sequenz stimmt. Wir schreiben nun alles genau an, normalerweise ist das nicht üblich.

<u>Dieses Verfahren kommt nicht zur Prüfung!!!</u> (aber man sollte wissen, wie es geht)
„*“ steht für eine Annahme

* Wir nehmen an, dass die 2 Prämissen wahr sind, und die Konklusion falsch!

Unsere Annahme:

(1)) $<\{\forall x(T^1x \vee S^1x), \neg T^1a\}, \exists x S^1x>$ ist ungültig!

(2) es gibt eine Bewertung B, sodass beide Prämissen wahr sind, aber die Konklusion falsch ist.

a) $(T^1x \vee S^1x) = 1$, bei B

b) $\neg T^1x = 1$, bei B
c) $\exists x S^1x = 0$, bei B

(3) $T^1a = 0$, bei B (damit $\neg T^1a=1$) (aus 2b)

(4) Für alle Individuenkonstanten α gilt, $[(T^1x \vee S^1x)]\ \gamma/x$ ist wahr bei B (aus 2a)

(5) $(T^1a \vee S^1a)$ ist wahr bei B (aus 4)

(6) S^1a ist wahr bei B (aus 3 und 5)

(7) Für alle Individuenkonstanten α gilt, $[S^1x]$ γ/x ist falsch bei B. (aus 2c)

(8) S^1a ist also falsch bei B (aus 7)

(8) und (6) widersprechen sich eindeutig!!!!

Durch diesen Widerspruch ist bestätigt, dass es kein Gegenbeispiel geben kann, und das heißt, dass die Sequenz gültig ist!!

Ad. 3 der Semantik) „Logisch wahre, falsche und indeterminierte Q-Sätze“

Sätze, die bei jeder Bewertung wahr sind, nennen wir „logisch wahre Sätze“.

[Tautologie nicht mehr, weil laut Definition eine Tautologie nur dann besteht, wenn sie aufgrund ihrer Junktoren immer wahr ist. Nun kommen aber bei uns auch noch Quantoren hinzu, deswegen können wir nicht mehr Tautologie sagen. Tautologien sind eine Teilmenge der *logisch wahren Sätze.* Tautologien sind immer logisch wahre Sätze, umgekehrt geht das nicht, denn sobald wir ein Einsetzungsergebnis betrachten müssen, können wir nicht mehr von einer Tautologie sprechen]

„Für alle Sätze ϕ: ϕ ist logisch wahr, g.d.w. ϕ bei jeder Bewertung den Wert 1 erhält“

Analog dazu:

„Für alle Sätze ϕ: ϕ ist logisch falsch, g.d.w. ϕ bei jeder Bewertung den Wert 0 erhält“

[Nannten wir damals Kontradiktion, jetzt „logisch falsch“ aus dem gleichen Grund wie die Tautologie nicht mehr Tautologie heißt ;)]

Determiniert= logisch wahr/falsch

„Für alle Sätze ϕ: ϕ ist determiniert g.d.w. ϕ entweder logisch wahr oder logisch falsch ist. Und ϕ ist logisch indeterminiert g.d.w ϕ nicht logisch determiniert ist, d.h., dass ϕ weder logisch wahr noch logisch falsch ist, d.h., dass ϕ bei mindestens einer Bewertung wahr und bei mindestens einer Bewertung falsch ist.“

Sätze von Q:

1) <u>logisch determinierte Sätze</u>: das sind logisch wahre und falsche Sätze

2)<u>logisch indeterminierte Sätze</u>

→ Nur weil ein Satz nicht logisch wahr ist, ist er noch lange nicht logisch falsch!! Er könnte auch indeterminiert sein!!

Beispiele zum Prüfen der Wahrheit und Falschheit von Sätzen!

Bsp.1) $(\forall y(G^1y \rightarrow H^1y) \rightarrow \exists x(G^1x \wedge H^1x))$ Ist nicht logisch wahr! → Prüfen!

Wir müssen also eine Bewertung finden, bei der diese Subjunktion falsch ist. Subjunktionen sind immer nur bei 1:0 falsch!

Vorderglied: $(G^1y \rightarrow H^1y)$ muss demnach wahr sein. Das Vorderglied ist selbst auch eine Subjunktion. Das G^1-beginnende kommt auch im Nachglied vor, deswegen bietet es sich an, alle G^1-beginnenden FALSCH zu machen! → G^1a, b, c, d…..=0

Eigentlich könnte man auch sagen: Alle atomaren Sätze= 0

Daraus Folgt nämlich: $(\forall y(G^1y \rightarrow H^1y) \rightarrow \exists x(G^1x \wedge H^1x))$

$\mathbf{1}\quad 0\quad 1\quad 0\quad \underline{\mathbf{0}}\quad \mathbf{1}\quad 0\quad 1\quad 0$

Es entsteht also die 1:0 Situation bei der Subjunktion, bei dieser Bewertung ist sie falsch! Und das galt es zu beweisen!

Bsp. 2) $((\forall zT^1z \rightarrow B) \vee T^1a)$ Ist logisch wahr! → Prüfen!!

Logisch wahre Sätze Prüft man indirekt, also durch die Annahme, es könnte ein Gegenbeispiel geben, und den damit verbundenen Widerspruch!

Eine Disjunktion ist nur bei 0:0 falsch. Den Wert müssten wir finden.

$T^1a=0$ (muss es auch, da wir 2 falsche Glieder brauchen)

In der Allquantifikation muss T^1z aber immer wahr sein. Daraus folgt:

$T^1z = 1$; $T^1a=0$

T^1z ist aber gleichbedeutend mit T^1a, es muss in der Allquantifikation immer, bei jeder Einsetzung, wahr sein. Daher kann man nun so anschreiben:
$T^1z=1=T^1a=0$ → $1=0$ man sieht also, dass das ein Widerspruch sein muss, und genau das wollten wir, daraus folgt nämlich, dass die Behauptung $((\forall zT^1z \rightarrow B) \vee T^1a)$ sei logisch wahr, richtig ist!!

Ende der Vo!!

Vo.   11.04.2011

<u>Ad. Äquivalenzen in Q</u>:

Def: „Für alle Sätze ϕ und ψ: ϕ und ψ sind äquivalent genau dann, wenn ϕ und ψ bei jeder Bewertung den gleichen Wahrheitswert haben."

[man merkt schon, dass die Definitionen genau gleich wie im ersten Semester in der Elementaren Logik I sind, hier muss man aber darauf Acht geben, dass sich die Definition des Satzes für uns geändert hat.]

Eine Äquivalenz schließt man aus, indem man eine Bewertung B angibt, bei der die beiden Sätze nicht denselben Wahrheitswert haben.

Den Nachweis einer Äquivalenz erbringen wir durch den indirekten Beweis. (=Annahme, es gäbe eine Bewertung, bei der die Sätze nicht den gleichen Wahrheitswert haben, und zum Widerspruch führen)

Bei einer äquivalenten Beziehung von 2 Sätzen gilt auch, dass deren Bisubjunktion immer den Wert 1 haben muss, da auf beiden Seiten der Bisubjunktion der gleiche Wert steht.

Es gilt auch: $\{\phi\} \vdash \psi$
$\{\psi\} \vdash \phi$ → gilt, sobald sie äquivalent sind!!

Ein kleines Bsp: $\neg \forall x F^1 x$ äquivalent zu $\exists x \neg F^1 x$

Der erste Satz sagt, dass es mindestens ein Ding gibt, für das x nicht gilt. Deswegen die Negation der Allquantifikation.
Die Existenzquantifikation sagt genau das gleiche, nämlich das es mindestens ein Ding gibt, für das es nicht gilt, also sind sie äquivalent.

oder: $\neg \exists x F^1 x$ äquivalent zu $\forall x \neg F^1 x$

Der erste Satz sagt, dass es nicht ein einziges Ding gibt, für das x wahr wäre.
Der zweite Satz sagt wieder genau das gleiche → Äquivalent!!

Es gilt also <u>immer</u>: $\neg \forall \alpha \phi$ äquivalent zu $\exists \alpha \neg \phi$

$\neg \exists \alpha \phi$ äquivalent zu $\forall \alpha \neg \phi$

Ad. Kontradiktorische Gegensätze:

Def.: „Für alle Sätze ϕ und ψ: ϕ und ψ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz in Q g.d.w. ϕ und ψ bei jeder Bewertung unterschiedliche Wahrheitswerte haben.“

→ Wieder durch indirekten Beweis prüfen!
→ Und wieder durch Anführen einer Bewertung widerlegen!
→ Ihre Bisubjunktion ist immer 0, da immer verschiedene Werte auf den beiden Seiten stehen müssen.

Ein kleines Bsp.: $\exists x\,(F^1x \wedge G^1x)$ kontra.dikt. $\forall x\,(F^1x \dashrightarrow \neg G^1x)$

Nehmen wir an F^1 steht für die Eigenschaft, ein Apfel zu sein. Und G^1 steht für die Eigenschaft, rot zu sein. Dann bedeutet der erste Satz, dass es mindestens ein Ding gibt, dass ein Apfel und rot ist. Der zweite Satz bedeutet dann, dass für alle Dinge gilt: Wenn sie ein Apfel sind, dann sind sie nicht rot. Also sieht man, dass es eine Kontradiktion ist!!!

Ad. Erfüllbarkeit bzw. Unerfüllbarkeit von Satzmengen:

Def.: „ Für jede Satzmenge Γ: Γ ist erfüllbar g.d.w. es mindestens eine Bewertung B gibt, bei der alle Elemente (=Prämissen + Konklusion) von Γ wahr sind.“

Anders gesagt, es muss ein Modell geben.
Γ = Menge von quantorenlogischen Sätzen

Erfüllbarkeitsnachweis: eine Bewertung finden, bei der alles wahr ist. Diese Bewertung ist das Modell!

Unerfüllbarkeitsnachweis: indirekter Beweis!

Es gilt: $\Gamma \vdash \phi$ g.d.w. Γ vereinigt $\{\neg\phi\}$ unerfüllbar ist.

[Das heißt: Wenn Prämissen wahr, dann auch die Konklusion]

BÄUME

Wachstumsregeln und Schließungsregel bleiben gleich wie im ersten Semester in der Elementaren Logik I!
Also zum Beispiel:

Alt: $(P \vee Q)$

P $\qquad$ Q

Neu: $(\forall x F^i x \vee P)$

$\forall x F^i x$ $\qquad$ P

Man sieht also, es bleibt alles beim Alten. Außer natürlich, dass sich die Definition des Satzes geändert hat, und, dass nun 4 neue Wachstumsregeln hinzukommen!

1) Negation der Existenzquantifikation: $\neg \exists \alpha \phi$

$$\neg \exists \alpha \phi \;\downarrow\; \forall \alpha \neg \phi$$

2) Negation der Allquantifikation: $\neg \forall \alpha \phi$

$$\neg \forall \alpha \phi \;\downarrow\; \exists \alpha \neg \phi$$

Kurz ein Beispiel:

1. $(\forall x F^i x \rightarrow \neg \exists x G^i x)$
2. $\neg \exists x \neg F^i x$
3. $\neg \forall x \neg G^i x$

$\neg \forall x F^i x$ $\qquad$ $\neg \exists x G^i x$

$\exists x \neg F^i x$ $\qquad$ $\forall x \neg G^i x$

Wir haben die erste Zeile zuerst gemolken, also zuerst verzweigt und nicht verlängert! Das hatte aber Sinn, so geht es schneller!

3) Existenzquantifikation: $\exists \alpha \phi$

$$\exists \alpha \phi \;\downarrow\; [\phi]\, \gamma/\alpha$$

(also ein Einsetzungsergebnis)

Diese neue Individuenkonstante muss aber konsequent durchgezogen werden, auf allen befindlichen Ästen!!!!!

Kleines Bsp: 1. $\exists x F^1 x$
2. $\neg F^1 a$

$\downarrow$

$F^1 b$

Nun nehmen wir b/x! (Nur nicht a nehmen, wäre nämlich für nicht viel zu gebrauchen!)

Der Baum ist fertig!

4) Allquantifikation: $\forall \alpha \phi$

$\downarrow$

$[\phi]\ \gamma/\alpha$

Kleines Bsp: $\forall x F^1 x$
$\neg F^1 c$

$\downarrow$

$F^1 c$

Die Allquantifikation besagt, dass alle Einsetzungsergebnisse wahr sein müssen. Der 2. Satz sagt, dass das nicht stimmt, denn F^1 mit c ist falsch. Deswegen haben wir gleich c eingesetzt, weil es schon vorhanden war und absehbar wurde, dass dieser Baum gleich geschlossen werden könnte. daraus folgt:

→ γ soll <u>relevant</u> sein!

γ ist relevant $\forall \alpha \phi$ in einem Ast eines Baumes g.d.w.

a) γ in diesem Ast vorkommt- oder
b) γ =a (also die erste Einsetzungsmöglichkeit), falls in diesem Ast keine Individuenkonstante vorhanden ist.

Wichtige Eigenschaften:

→ Auswertung eventuell mehrfach (siehe Bsp. 1)
→ deswegen wird auch nicht abgehakt
→ aufhören nur dann, wenn auf jedem Ast auf dem eine Allquantifikation liegt, bereits jede relevante Individuenkonstante eingesetzt wurde. (Bsp. 2)
→Regelanwendung nur auf einem Ast (also anders als sonst, wo wir auf jedem noch freien Ast gemolken haben) sonst passiert es, dass Individuenkonstanten relevant werden, ohne es vorher gewesen zu sein, was zu unnötiger Komplexität führen würde!

Bsp.1) 1. $\forall x F^1 x$
2. $(\neg Fa \vee \neg F^1 b)$ Angemerkt vorweg, dass es unerfüllbar sein muss, da die Allquantifikation besagt, dass alle F^1-a, b, c, d, e…..wahr sein müssen, und in der zweiten Zeile bereits festgelegt ist, dass a und b falsch sind! Also nehmen wir a als relevante Individuenkonstante →

1. $\forall x F^1 x$
2. $(\neg Fa \vee \neg F^1 b)$ (a/x)

$F^1 a$

$\neg F^1 a$ $\neg F^1 b$

$F^1 b$

(Hier sieht man, dass wir die Allquantifikation zweimal ausgewertet haben, damit der Baum geschlossen werden kann. Es ist erlaubt, weil b ebenfalls relevant ist!!

Bsp.2) 1. $\forall x P^2 ax$
2. $\neg P^2 ba$ Ist erfüllbar, also nicht geschlossen! Frage: Wann hört man auf?

$P^2 aa$

$P^2 ab$

Man hört auf, wenn keine relevante Individuenkonstante mehr vorhanden ist, die nicht schon gemolken wurde! Daher ist der Baum fertig und offen, weil die Allquantifikation erschöpft wurde! Wir haben für a/x und b/x eingesetzt, mehr muss man nicht machen!

Bsp. 3.1) 1. $\forall x F^1 x$

2. $\exists x \neg F^1 x$ wir melken die Allqu. zuerst und schauen was passiert

$\downarrow$

$F^1 a$ (Allqu. erschöpft)

$\downarrow$

$\neg F^1 b$ (aus 2, dadurch verliert die Allqu. den Status der Erschöpftheit weil b nun relevant)

$\downarrow$

$F^1 b$ ↯ (Allqu. nochmal gemolken)

FERTIG!

umgekehrt wäre es besser, also mit Existenzquantifikation anfangen!

Bsp.3.2) 1. $\forall x F^1 x$

2. $\exists x \neg F^i x$

$\downarrow$

$\neg F^1 a$

$\downarrow$

$F^1 a$ ↯

Durch das Einführen von a brauche ich nun nicht mehr 2 Individuenkonstanten und der Baum bleibt kleiner mit dem gleichen Ergebnis!

Daraus entnehmen wir also noch eine Strategieregel:

„Existenzquantifikationen vor Allquantifikationen sofern es möglich ist!“

und

„$\neg\forall$ und $\exists$ vor $\forall$!“

Ende der Vo!

Vo. Nachtrag vom 09.04.11

Weiter Beispiele um das Melken der quantorenlogischen Bäume zu üben!

Bsp1)

$\forall x(\neg F^1x \rightarrow G^1x)$ → Wurzel, Anwendung der Regeln

$\exists y \neg G^1y$

$\neg \exists x\, F^1x$

$\forall x\, F^1x$

$\neg G^1a$

$\neg F^1a$

$(\neg F^1a \rightarrow G^1a)$

$\neg \neg F^1a$	G^1a

Baum geschlossen und fertig!

Bsp2)

$\forall z(\neg F^1z \vee \exists u\, G^1u)$

$\neg(\exists z F^1z \rightarrow \exists u\, G^1u)$ → Wurzel regeln anwenden!

$\exists z\, F^1z$

$\neg \exists u\, G^1u$

F^1a

$\forall u \neg G^1 u$

$(\neg F^1a \vee \exists u\, G^1u)$

$\neg F^1a$	$\exists u\, G^1u$
	G^1b
	$\neg G^1b$

Baum geschlossen und fertig!

Bsp3) Jetzt wird es ein wenig komplizierter! ;)

$\forall x(\exists y\, F^2xy \rightarrow \forall z\, F^2zx)$
F^2ab
$\neg\forall x\forall y\, F^2xy$
$Ex\, \neg\forall y\, F^2xy$
$\neg\forall y\, F^2cy$
$Ey\, \neg F^2cy$
$\neg F^2cd$
$(Ey\, F^2ay \rightarrow \forall z\, F^2za)$

$\neg Ey\, F^2ay$
$\forall y\, \neg F^2ay$
$\neg F^2ab$

$\forall z\, F^2za$
$(\exists y F^2dy \rightarrow \forall z\, F^2zd)$

$\neg\exists y\, F^2dy$
$\neg\exists y F^2dy$
$\forall y\, \neg F^2dy$
$\neg F^2da$
F^2da

$\forall z F^2zd$
$\forall z F^2zd$
F^2cd

Leider kann ich keine genaue Erklärung zu den Beispielen abgeben, ich übertrage diese Beispiele nur von einem anderen Skript. Stimmen müssten sie aber schon, einfach oben angeführte Regeln durchblättern, dann erkennt man das Schema!

Vo. Nachtrag vom 16.05.2011 und vom 23.05.2011 [zusammengefasst weil beim 2. Termin vieles wiederholt wurde]

Wir kommen zu der Formalisierung:

Z^1: ….ist eine Zahl

Q^1: ….ist eine Quadratzahl

P^1: ….ist positiv

G^1: ….ist gerade

K^2: ….ist kleiner als ….

G^2: …..ist gleich……

E^3: ….+……=…..

n=0

d=3

f=5

x=

→ Das ist unser Formalisierungsschlüssel für die folgenden Erklärungen.

1. Formalisierungen durch atomare Q-Sätze

2. Formalisierungen durch molekulare Q-Sätze

3. Formalisierungen durch geschlossene Quantifikationen

3.1. Formalisierungen durch geschlossene Allquantifikationen

3.1.1. <u>Allsätze</u>

a) uneingeschränkte Allsätze

b) eingeschränkte Allsätze (=A-Sätze)

3.1.2. <u>Nichts Sätze</u>

a) uneingeschränkte Nichts-Sätze

b) eingeschränkte Nichts-Sätze (=E-Sätze)

3.1.2. Nur-Sätze

3.2. Formalisierungen durch geschlossene Existenzquantifikationen

3.2.1. I-Sätze

3.2.2. O-Sätze

Ad. uneingeschränkte Allsätze:

Z.B. Alles ist vergänglich! → Alles ist B.

eingeschränkte Allsätze:

Z.B. Alle A sind B. [hier liegt also der Unterschied darin, dass die eingeschränkten Allsätze nur für eine Teilmenge Anspruch und Gültigkeit erheben.]

also z.B.: Alle Menschen sind sterblich. → Alle A sind B.

Schema: Für alle x gilt. Wenn x ein A ist, dann ist x auch B. → $\forall x(Z^1x \dashrightarrow G^1x)$

Bsp.1) Jede Quadratzahl ist positiv. Oben genannter Formalisierungsschlüssel: $\forall x(Q^1x \dashrightarrow P^1x)$

Bsp. 2) Jede Quadratzahl ist positiv uns gerade: $\forall x(Q^1x \dashrightarrow (P^1x \wedge G^1x))$

andere Formalisierungen:

Bsp.3) Jede Quadratzahl ist kleiner als 0: $\forall x(Q^1x \dashrightarrow K^2xn)$

Bsp.4) Addiert man 0 zu irgendeiner Zahl, so ist die Summe diese Zahl selbst.

In Schritten: $x+0=x$ → $\forall x(Z^1x \dashrightarrow E^3xnx)$

ad. Nichts-Sätze

a) uneingeschränkte:

Z.B. Nichts ist unvergänglich.

Schema: Nichts ist B. → Für alle x. x ist nicht B.

Bsp.) Nichts ist eine Zahl: $\forall x\ \neg Z^1x$

b) eingeschränkte:

Z.B. Kein A ist ein B.

Schema: Für alle x gilt. Wenn x ein A ist, dann ist x kein B.

Bsp.1) Keine Zahl ist eine Quadratzahl: $\forall x(Z^1x \text{-->} \neg Q^1x)$

Bsp.2) Keine positive Zahl ist kleiner als 0: $\forall x((Z^1x \wedge P^1x) \text{-->} \neg K^2xn)$

Bsp.3) Keine Zahl, die kleiner als 0 ist, ist gleich 5: $\forall x((Z^1x \wedge K^2xn) \text{-->} \neg G^2xf)$

Solche Beispiele kann man natürlich auch mit ihren Äquivalenten anschreiben:

Bsp.1) $\forall x(Z^1x \text{-->} \neg Q^1x)$ = $\neg \exists x(Z^1x \wedge Q^1x)$

Ad. <u>Nur-Sätze:</u>

z.B. Nur A's sind B's. → Nur Menschen sind sterblich.

Schema: Für alle x. Nur wenn x ein A ist, ist x auch ein B. Umgekehrt: Für alle x. Wenn x ein B ist, dann ist x ein A.

(A --> B) B ist hier die Notwendigkeit. Deswegen steht es hinten.

Bsp.1) Nur Zahlen sind Quadratzahlen.

Schema: Für alle x. Nur wenn x eine Zahl ist, dann ist x auch eine Quadtratzahl.

$\forall x(Q^1x \text{ --> } Z^1x)$ Z steht hinten, weil es die Notwendigkeit ist.

Es gibt aber auch Nur-Sätze, die mehrdeutig sind, und deswegen auch auf mehrere Arten angeschrieben werden können.

z.B. Nur Zahlen, die kleiner als 5 sind, sind kleiner als 3.

1) <u>Starke Deutung</u>: NUR solche Dinge, die Zahlen und kleiner als 5 sind, sind kleiner als 3.

Also: $\forall x(K^2xd \text{ -->} (Z^1x \wedge K^2xf)$

2) Schwache Deutung: Nur solche Zahlen, die kleiner als 5 sind, sind kleiner als 3.

Also: $\forall x (Z^1x \dashrightarrow (K^2xd \dashrightarrow K^2xf))$

Das heißt: Wenn x eine Zahl ist, dann gilt, dass x nur kleiner als 3 ist, wenn x kleiner als 5 ist.

→ Aus starken Deutungen können schwache entstehen, umgekehrt nicht.

Kurze Anmerkung für die Unterscheidung zwischen starker und schwacher Deutung:

Die starke Deutung besagt ausdrücklich, dass eine Bedingung besteht, damit x kleiner als 3 sein KANN. Diese Bedingung lautet, x muss eine ZAHL sein, und x muss kleiner als 5 sein. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann kann x auch nicht kleiner als 3 sein!!!

Im Gegensatz dazu sagt die schwache Deutung nur aus, dass -wenn x schon eine Zahl ist - dann gilt, dass sie kleiner als 5 sein muss, um kleiner als 3 sein zu können. Die Bedingung ist also nicht so STARK wie in der oberen Deutung.

Bsp.1) 1. Nur Zahlen, die kleiner als 5 sind, sind kleiner als 3.

Ergo gilt: Alles, was kleiner als 3 ist, ist eine Zahl.

Starke Deutung: 1. $\forall x(K^2xd \dashrightarrow (Z^1x \wedge K^2xf)$

Ergo gilt: $\forall x(Z^1x \dashrightarrow K^2d)$ [vorläufige Lösung, wird erst nächste Woche genau besprochen]

ENDE.

Vo. 30.05.2011

Ad. I- und O-Sätze:

Formalisierungen durch geschlossene Existenzquantifikationen.

I-Sätze:

Sätze wie:

Manche A sind B. oder

Einige A sind B. oder

Es gibt A‘s, die auch B‘s sind. oder

Mindestens ein A ist B.

→ Alle diese Aussagen erkennen wir der Einfachheit wegen als synonym an.

Schema: Für mindestens ein x gilt: x ist ein A und x ist ein B.

Beispiele dazu:

Bsp.1) Einige Zahlen sind gerade.

Schema: Es gibt mindestens eine Zahl, die auch gerade ist. → Zahl und gerade.

$\exists x(Zx \wedge Gx)$

[die Hochzahlen bei den Satzbuchstaben lassen wir nun weg, ist im Logikjargon so üblich]

Bsp.2) Es gibt eine Quadratzahl, die positiv und gerade ist.

$\exists x\ (Qx \wedge (Px \wedge Gx)$

Bsp.3) Mindestens eine Zahl ist kleiner als 3.

$\exists x(Zx \wedge Kxd)$

Bsp.4) Es gibt mindestens eine Zahl, die die Summe von 3 und 5 ist.

$\exists x(Zx \land Edfx)$

<u>ad. O-Sätze:</u> O-Sätze sind die Negationen der I-Sätze.

Also:

Einige A's sind nicht B. oder

Manche A's sind nicht B. oder

Es gibt mindestens ein A, das nicht B ist.

Schema: Bleibt gleich, außer dass das zweite Glied nun negiert wird.

Bsp.1) Einige gerade Zahlen sind nicht positiv.

$\exists x((Zx \land Gx) \land \neg Px)$

Bsp.2) Einige positive Zahlen sind nicht gerade.

$\exists x((Zx \land Px) \land \neg Gx)$

<u>Verschachtelte Sätze:</u> Haben mindestens 2 Quantifikatoren, wobei der eine im Bereich des anderen steht.

Bsp.1) Zu jeder Zahl gibt es eine kleinere.

Schema: Für alle x: Wenn x eine Zahl ist, dann gibt es mindestens eine Zahl, die kleiner ist als x.

$\forall x(Zx \dashrightarrow \exists y(Zy \land Kyx)$

Das y ist wichtig, sonst wäre die Formel nur eine offene Formel und kein verschachtelter Satz. Wenn das passiert, nennt man es „Variablenkollision".

Bsp.2) Es gibt mindestens eine Zahl, die kleiner ist als jede Quadratzahl.

$\exists x(Zx \wedge \forall y(Qy \dashrightarrow Kxy)$

Bsp.3) Es gibt mindestens 2 Quadratzahlen.

$\exists x(Qx \wedge \exists y\ (Qy \wedge \neg Gxy)$

Bsp.4) Es gibt eine kleinste Quadratzahl. (=Es gibt mindestens eine Quadratzahl, die kleiner ist, als alle anderen.)

$\exists x(Qx \wedge \forall y((Qy \wedge \neg Gyx) \dashrightarrow Kxy))$

Bsp.5) Jede Zahl ist von mindestens einer Zahl verschieden.

$\forall x(Zx \dashrightarrow \exists y(Zy \wedge \neg Gxy))$

Bsp.6) Jede Zahl ist die Summe zweier Zahlen. (=y+z=x)

$\forall x(Zx \dashrightarrow \exists y(Zy \wedge \exists z(Zz \wedge Eyzx)))$

Vo. 06.06.2011

→ <u>Quantifikatorentausch:</u>

Für alle Variablen α und β sowie für alle Formeln ϕ, in denen höchstens α und β frei vorkommen, gilt:

1) ∀α∀βϕ folgt logisch $\forall\beta\forall\alpha\varphi$

z.B. ∀x∀yFxy folgt logisch ∀y∀xFxy

2) $\exists\alpha\exists\beta\varphi$ folgt logisch $\exists\beta\exists\alpha\varphi$

3) $\exists\alpha\forall\beta\varphi$ folgt logisch $\forall\beta\exists\alpha\varphi$

Diese 3 Gesetze gelten nur für die Quantifikatoren am Anfang. Für Quantifikatoren in der Mitte einer Formel gelten sie <u>nicht</u>!!

Das 3. Gesetz schauen wir uns genauer an.

z.B.) 1. ∃x∀yFxy zu ϕ relevanter Existenzsatz ∃x∀yFxy

Noch mal angeschrieben:

1. ∃x∀yFxy

2. ∃x∀yFxy

3. ∀y∃xFxy → Das wäre nun kein relativer Existenzsatz. Jeder absolute Satz (1.) hat nur einen zu ihm relativen Satz (2.)

Kurze Erklärung von absoluten und relativen Sätzen.

Ein absoluter Satz ist zum Beispiel: Es gibt etwas, das Ursache von allem ist.

Der relative dazu: Alles hat eine Ursache.

Man sieht also, dass die beiden Sätze nicht das Gleiche bedeuten. Von einem absoluten Satz kann man auf das Relativ schließen. Umgekehrt funktioniert das aber nicht. Macht man es trotzdem, nennen wir es „Fehlschluss“.

Bsp) {∀y∃xFxy} daraus folgt nicht logisch ∃x∀yFxy

nun sollen wir dieses Argument, beziehungsweise diese Behauptung prüfen. Ein Baum wäre zu lang und zu komplex. Wir suchen uns einfach ein Modell für die Prämissenmenge.

→ Faa, Fbb, Fcc, etc……………….1

alle anderen ……………………..0

Das wäre ein Modell.

Erklärung: Bei der Allquantifikation müssen alle Einsetzungsergebnisse wahr sein, damit sie auch wahr ist.

D.h. alles nach der Allquantifikation ist relevant für uns. → ∃xFxy

[∃xFxy] a/y = ∃xFxa → wahr, wenn mindestens eine Einsetzung für x wahr ist. Also z.B. x=a (ist ja möglich)

→ Das heißt, es gibt für alle a, b, c, d, ……so einen Fall. Es gibt also ein Modell für die Prämissenmenge!!

Nun zur Konklusion: Sie muss bei dieser Bewertung falsch sein, damit die ursprüngliche Behauptung verifiziert ist.

→ ∀yFxy: Damit das stimmt, muss jedes Einsetzungsergebnis wahr sein. Wie oben angeführt ist Faa, Fbb, Fcc etc. wahr bei der Bewertung. Fab, Fac, Fad etc. sind aber falsch!!!!!

Daher: Unsere Bewertung ist ein Gegenbeispiel für die Konklusion!

Die Behauptung stimmt also, {∀y∃xFxy} daraus folgt nicht logisch ∃x∀yFxy

→Das war ein Beispiel für einen Fehlschluss, dieser passiert gar nicht so selten, wie man glauben mag.

Wir widmen uns nun einem berühmten Beispiel für den Fehlschluss. Thomas von Aquin stellte seine 5 Gottesbeweise vor. Der 3. ist ein gutes Beispiel für den Fehlschluss.

Kontingente Dinge: Dinge, die jetzt existieren aber an irgendeinem Zeitpunkt nicht existiert haben.

1. Nebenargument:

1. Jedes kontingente Ding existierte irgendwann nicht. (Zu jedem kontingenten Ding gibt es einen Zeitpunkt, in der Vergangenheit wohl angemerkt, zu dem es nicht existierte)

Ergo gilt: Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem kein kontingentes Ding existierte.

2. Nebenargument:

1. Wenn es einen Zeitpunkt gibt, zu dem Nichts existierte, dann existiert auch zu jedem anderen Zeitpunkt Nichts. (=aus Nichts kann auch nichts entstehen)

2. Es gibt zum gegenwärtigen Zeitpunkt Dinge.

Ergo gilt: Es ist nicht der Fall, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem nichts existierte.

Die Konklusionen der Nebenargumente werden zu Prämissen des Hauptarguments.

→

Hauptargument:

1. Es gibt einen Zeitpunkt, an dem kein kontingentes Ding existierte.

2. Es ist nicht der Fall, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem nichts existierte.

Ergo gilt: Nicht alles ist kontingent.

Formalisierungsschlüssel:

K …………. ist kontingent.

Z …………. ist ein Zeitpunkt.

E^2……….. existiert zu ………..

S^2 ……… ist später als ………

g: der gegenwärtige Zeitpunkt.

1. Nebenargument:

1. $\forall x(Kx \rightarrow \exists y\ ((Zy \wedge Sgy) \wedge \neg Exy))$

Ergo gilt: $\exists y((Zy \wedge Sgy) \wedge \forall x(Kx \rightarrow \neg Exy))$

Die Ungültigkeit dieses Arguments kann man wieder durch einen Baum (ist aber sehr lang und komplex) oder durch ein Gegenbeispiel beweisen.

2. Nebenargument:

1. $\forall x((Zx \wedge \forall y\ \neg\ Eyx) \rightarrow \forall z\ ((Zz \wedge Szx) \rightarrow \forall w\ \neg\ Ewz))$

2. $\exists xExg$

Ergo gilt: $\neg\ \exists x((Zx \wedge Sgx) \wedge \forall y\ \neg\ Eyx)$

Ende der Vo.